Sekwencyjna dwuosobowa gra konkurencyjna o sumie niezerowej

Sylwester Laskowski

Rozważono sytuacje decyzyjne danego gracza, dla ustalonych kolejności ruchów graczy. Wskazano na problem nieznanego charakteru kryterium gracza konkurencyjnego i niejednoznaczności jego odpowiedzi. Zaproponowano analityczne narzędzia wspomagające proces podejmowania decyzji.

gra konkurencyjna, rynek telekomunikacyjny, gra o sumie niezerowej, strategie gry

Wprowadzenie

Działalność przedsiębiorstw telekomunikacyjnych można analizować z wielu perspektyw. Jedną z nich jest analiza konkurencyjna, oparta na metodach teorii gier [5]. Sytuacja decyzyjna przedsiębiorstw jest wówczas postrzegana jako gra, w której gracze (przedsiębiorstwa telekomunikacyjne) dążą do realizacji określonych celów, stojąc przed koniecznością uwzględniania w procesie decyzyjnym decyzji (wybranych strategii gry) innych graczy [4]. Strategia gry może być rozumiana bardzo różnie, np. może nią być wysokość ustalonych cen za świadczone usługi [6].

Określony i ustalony zbiór decyzji, podjętych przez poszczególnych graczy kształtuje wynik gry, który jest opisany za pomocą wielu kryteriów, takich jak np. zysk, udział graczy w rynku, określona dystrybucja ruchu, czy wielkość ponoszonych kosztów. Określone kryterium oceny (np. udział w rynku), rozpatrywane na określonym rynku (np. rynku połączeń lokalnych), definiuje daną grę (gra o udział w rynku połączeń lokalnych). Kryterium definiujące grę określa się mianem **funkcji wypłaty**. Gracze mogą, lecz nie muszą znać nawzajem swoich funkcji wypłaty, definiujących gry, w które grają. Znajomość funkcji wypłaty, w połączeniu ze znajomością możliwych strategii gry danego gracza, określa się mianem znajomości jego macierzy wypłat [4, 5].

Niniejsza publikacja jest poświęcona analizie sytuacji decyzyjnej, z udziałem dwóch graczy (dwa przedsiębiorstwa telekomunikacyjne) – A i B, którzy znają nawzajem swoje macierze wypłat. Gracze podejmują decyzje sekwencyjnie. Oba przypadki – gracz A wykonuje ruch jako pierwszy, gracz A wykonuje ruch jako drugi – zostaną rozpatrzone osobno. Ponadto zakłada się, że gracze dążą wyłącznie do optymalizacji własnej funkcji wypłaty. Nie stosują więc strategii antagonistycznych w celu pogorszenia wyniku uzyskanego przez konkurenta. Zakłada się też brak możliwości uzgadniania wspólnych strategii.

W dalszej części zostaną przedstawione analityczne narzędzia, wspierające gracza A w procesie decyzyjnym, zmierzającym do maksymalizacji jego funkcji wypłaty.

Sytuacja gracza *A*, wykonującego ruch jako pierwszy

Wybór strategii gry

Funkcja wypłaty danego gracza jest określonym kryterium oceny decyzji podjętej przez niego. W szczególnym przypadku kryterium to może być maksymalizowane, minimalizowane lub stabilizowane. Maksymalizacja, minimalizacja i stabilizacja wyznaczają swoisty „kierunek optymalizacji kryterium”, który zostanie nazwany **charakterem kryterium**. Gracz *A* może, lecz nie musi wiedzieć *a priori*, jaki charakter ma dane kryterium dla gracza *B*. Inaczej mówiąc, znajomość macierzy wypłat gracza *B*, a co się z tym wiąże znajomość jego funkcji wypłaty, nie wystarcza do precyzyjnego określenia celu, jaki on sobie wyznacza. Nie wystarczy zatem wiedzieć, że *B* np. „gra o zysk”, trzeba jeszcze wiedzieć, czy ów zysk gracz *B* chce maksymalizować[①]. Rozważenia wymagają więc dwa następujące przypadki.

1. Gracz *A* wie, jaki charakter ma kryterium gracza *B*.
2. Gracz *A* nie wie, jaki charakter ma kryterium gracza *B*.

W pierwszym przypadku określenie celu jest proste, jeśli kryterium gracza *B* jest maksymalizowane lub minimalizowane. Jeśli zaś kryterium ulega stabilizacji, komplikuje się, gdyż gracz *A* nie musi wiedzieć, wokół jakiej wartości dokonuje się ta stabilizacja. Z punktu widzenia analizy tego typu gier dogodnie zatem jest przeprowadzić inny podział sytuacji decyzyjnej.

1. Gracz *A* wie, jaki charakter ma kryterium gracza *B* i jest to kryterium maksymalizowane, minimalizowane albo stabilizowane ze znaną dla *A* wartością, wokół której dokonuje się stabilizacja.
2. Gracz *A* nie wie, jaki ma charakter kryterium gracza *B* lub wie, że jest to kryterium stabilizowane, lecz nie wie wokół jakiej wartości.

Te ostatnie dwa przypadki zostaną określone odpowiednio jako:

1. **Znany charakter kryterium konkurenta**.
2. **Nieznany charakter kryterium konkurenta**.

Dalej zostaną przedstawione racjonalne sposoby rozgrywania gry przez gracza *A* w obu sytuacjach.

Znany charakter kryterium konkurenta

Gdy gracz *A* zna charakter kryterium[②] (funkcji wypłaty) gracza konkurencyjnego *B*, jest możliwe wyznaczenie dla każdej potencjalnie wybranej przez *A* strategii a_i najlepszej z punktu widzenia gracza *B* odpowiedzi $\hat{b}(a_i)$.

① *Znajomość charakteru kryterium nie musi być tak oczywista, jak to się może wydawać. Powszechnie przyjmuje się, że gracze rynkowi maksymalizują zysk i udział w rynku, minimalizują zaś koszty. Realia rynków poddanych kontroli mogą być jednak inne. Przykładowo, przedsiębiorstwo, które zbliża się do granicy, po przekroczeniu której zostanie uznane za posiadające znaczącą pozycję rynkową, może dążyć do ustabilizowania aktualnej pozycji (udziału w rynku, zysku). Przedsiębiorstwo, na które nałożono obowiązek ustalania cen za usługi na podstawie ponoszonych kosztów, może dążyć do (choćby w sztuczny sposób) ich zwiększania itp.*

② *Zakłada się, że zna także analityczną postać tego kryterium.*

W zależności od tego, czy $V_i^B(b_j)$ jest kryterium maksymalizowanym, minimalizowanym, czy stabilizowanym, otrzymuje się:

– dla kryteriów maksymalizowanych:

$$\hat{b}(a_i) = \arg\max_j V_i^B(b_j) : \forall i, \tag{1}$$

– dla kryteriów minimalizowanych:

$$\hat{b}(a_i) = \arg\min_j V_i^B(b_j) : \forall i, \tag{2}$$

– dla kryteriów stabilizowanych:

$$\hat{b}(a_i) = \arg\max_j \frac{1}{|\hat{V}^B - V_i^B(b_j)| + 1} : \forall i, \tag{3}$$

gdzie $\hat{V}^B$ jest pożądaną przez gracza B wartością jego funkcji wypłaty $V_i^B(b_j)$.

Jeżeli oznaczyć indeks strategii $\hat{b}(a_i)$ przez $\hat{j}$, to wartość wypłaty gracza A – w sytuacji, gdy wybrał on swoją strategię a_i, a gracz B w odpowiedzi wybrał najlepszą dla siebie strategię $\hat{b}(a_i)$ – będzie oznaczona przez $V_{\hat{j}}^A(a_i)$ Zakładając, że kryterium gracza A jest maksymalizowane lub sprowadzone do takiej postaci, najlepszą strategię gry – $\hat{a}$ gracz A otrzymuje w wyniku rozwiązania poniższego zadania optymalizacji:

$$\hat{a} = \arg\max_i V_{\hat{j}}^A(a_i). \tag{4}$$

Przykład 1

Po liberalizacji rynku połączeń międzynarodowych, dawny monopolista – operator A spodziewa się w najbliższym czasie wejścia na rynek nowego operatora B. Operator A rozważa możliwość zmiany struktury taryfowej za połączenia międzynarodowe przed rozpoczęciem funkcjonowania operatora B tak, aby w etapie przejściowym zatrzymać możliwie największą liczbę klientów (gra o liczbę użytkowników [4, 5]). Operator A rozpatruje cztery strategie gry:

a_1 – zachować aktualną strukturę taryfową,

a_2 – obniżyć o 5% ceny połączeń międzynarodowych,

a_3 – obniżyć o 10% ceny połączeń międzynarodowych,

a_4 – obniżyć o 15% ceny połączeń międzynarodowych.

Budowa infrastruktury sieciowej zmusiła operatora B do poniesienia znacznych nakładów finansowych i zaciągnięcia dużych kredytów. Operator A przewiduje, że z tego powodu podstawowym celem najbliższej działalności operatora B będzie szybki zwrot poniesionych kosztów i spłata zaciągniętych kredytów (gra o zysk – maksymalizacja zysku).

Operator A dobrze zna technologię wykorzystaną do budowy sieci przez operatora B, a względnie mała liczba punktów połączeniowych z operatorami sieci lokalnych oraz niewielka liczba łączy wychodzących do sieci krajów sąsiadujących pozwala operatorowi A dość dobrze określić strukturę kosztów operatora B.

Operator A przypuszcza, że operator B będzie rozważał cztery strategie cenowe:

- b_1 – zachować obecną strukturę taryfową operatora A,
- b_2 – obniżyć o 5% ceny połączeń międzynarodowych względem aktualnych cen operatora A,
- b_3 – obniżyć o 10% ceny połączeń międzynarodowych względem aktualnych cen operatora A,
- b_4 – obniżyć o 15% ceny połączeń międzynarodowych względem aktualnych cen operatora A.

Na podstawie modelu popytu oraz modelu kosztów sieci operatora B, operator A przeprowadził obliczenia dla każdej kombinacji dopuszczalnych strategii gry obu graczy, wyznaczając odpowiednio liczbę użytkowników operatora A (w setkach tysięcy) oraz zysk operatora B (w milionach złotych). Macierze wypłat operatorów A i B przedstawiono w tablicy 1.

Tabl. 1. Macierz wypłat operatorów A i B

Strategie	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[6,6]	[5,8]	[4,7]	[7,5]
a_2	[8,5]	[4,4]	[3,5]	[5,6]
a_3	[7,4]	[6,3]	[3,3]	[6,6]
a_4	[5,6]	[6,5]	[6,6]	[7,7]

Aby wskazać najlepszą własną strategię gry, operator A określa dla każdej strategii a_i, najlepszą z punktu widzenia operatora B odpowiedź – $\hat{b}(a_i)$, tj. strategię b_j, dającą największą wartość wypłaty $V_i^B(b_j)$. Na tej podstawie dla każdej strategii a_i operator A określa wartość wypłaty, jaką otrzyma – $V_{\hat{j}}^A(a_i)$ i wybiera strategię, która tę wypłatę maksymalizuje.

Tabl. 2. Zestawienie najlepszej z punktu widzenia gracza B odpowiedzi oraz wartości wypłat obu graczy dla każdej strategii gracza A

a_i	$\hat{b}(a_i)$	$V_i^B(\hat{b}(a_i))$	$V_{\hat{j}}^A(a_i)$
a_1	b_2	8	5
a_2	b_4	6	5
a_3	b_4	6	6
a_4	b_4	7	7

W tablicy 2 dokonano zestawienia odpowiednich wartości dla poszczególnych strategii a_i. Którą strategię powinien wybrać operator A? Zgodnie z zależnością (4) tę, która daje największą wartość wypłaty $V_{\hat{j}}^A(a_i)$. Największą wypłatę $V_4^A(a_4) = 7$ zapewnia operatoratorowi A strategia a_4. Ona zatem powinna zostać wybrana.

□

Nieznany charakter kryterium konkurenta

Nieznajomość charakteru kryterium konkurenta została zdefiniowana jako zajście jednego z dwóch przypadków:

– gracz A nie wie, jaki ma charakter kryterium gracza B;

– gracza A wie, jaki charakter ma kryterium gracza B i jest to kryterium stabilizowane z tym, że A nie wie wokół jakiej wartości.

Oba przypadki można sprowadzić do wspólnej, ogólnej postaci zakładając, że kryterium gracza B jest stabilizowane wokół wartości nieznanej graczowi A. Wynika to z faktu, że kryteria maksymalizowane można traktować jako kryteria stabilizowane względem największej z możliwych wartości, kryteria minimalizowane zaś względem wartości najmniejszej. W tym przypadku wspomaganie gracza A w wyborze najkorzystniejszej strategii można oprzeć na metodzie złożonej z niżej opisanych kroków.

1. Określenie zbioru możliwych wartości, wokół których będzie się dokonywać stabilizacja (np. zbiór wszystkich wartości liczbowych z macierzy wypłat) $\hat{V}_s^B$ (s – indeks wartości wokół której dokonuje się stabilizacja).
2. Utworzenie nowej macierzy wypłat gracza A, w której strategiami – $\hat{b}_s$ gracza B będą wyżej opisane, możliwe wartości stabilizowane $\hat{V}_s^B$, a elementami macierzy $V_{\hat{s}}^A(a_i)$ – wartości wypłat $V_j^A(a_i)$ gracza A, jakie otrzyma w sytuacji, gdy w odpowiedzi na jego strategię a_i gracz B wybiera strategię $b_s(a_i)$, dla której wartość $V_i^B(b_j)$ jest najbliższa względem aktualnie rozpatrywanej wartości stabilizowanej $\hat{V}_s^B$.

   Odległość można definiować jako wartość bezwględną różnicy między wartościami $\hat{V}_s^B$ i $V_i^B(b_j)$. Im moduł różnicy jest mniejszy, tym wartości są sobie bliższe. Wybiera się zatem strategię, dla której:
$$b_s(a_i) = \arg\min_j |\hat{V}_s^B - V_i^B(b_j)| : \forall i.$$
3. Otrzymaną macierz traktuje się jako model gry przeciwko naturze i do jej analizy stosuje metody właściwe dla tego typu gier [1, 2, 3, 5–9].

Przykład 2

Zakłada się, że macierz wypłat dla obu graczy jest przedstawiona w tablicy 3. Gracz A dąży do maksymalizacji swojej wypłaty, jednak nie zna charakteru kryterium gracza B. Przyjmuje więc, że gracz B stabilizuje swoją wartość wypłaty wokół nieznanej dla A wartości.

Tabl. 3. Macierz wypłat dla graczy A i B

Strategie	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[6,6]	[5,8]	[4,7]	[7,5]
a_2	[8,7]	[4,4]	[3,5]	[5,6]
a_3	[7,5]	[6,4]	[3,3]	[6,6]
a_4	[5,5]	[6,4]	[6,6]	[7,7]

Wartości w macierzy wypłat gracza B zmieniają się od $\hat{V}^B = 3$ do $\hat{V}^B = 8$. Przekształcając z punktu widzenia gracza A problem do gry przeciwko naturze, uzyskuje się grę, w której gracz B będzie miał sześć strategii $\hat{b}_s$:

$\hat{b}_1$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_1^B = 3$;
$\hat{b}_2$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_2^B = 4$;
$\hat{b}_3$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_3^B = 5$;
$\hat{b}_4$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_4^B = 6$;
$\hat{b}_5$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_5^B = 7$;
$\hat{b}_6$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_6^B = 8$.

Elementy macierzy wypłat gracza A – $V_{\hat{s}}^A(a_i)$ w grze przeciwko naturze odnajduje się zgodnie z następującym rozumowaniem.

- Jeśli gracz B dąży do stabilizacji wypłaty wokół wartości $\hat{V}_1^B = 3$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_1, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_4, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 3$ wypłatę $V_1^B(b_4) = 5$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_4^A(a_1) = V_{\hat{1}}^A(a_1) = 7$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 3$ wypłatę $V_2^B(b_2) = 4$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_2) = V_{\hat{1}}^A(a_2) = 4$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_3, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_3, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 3$ wypłatę $V_3^B(b_3) = 3$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_3^A(a_3) = V_{\hat{1}}^A(a_3) = 3$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_4, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 3$ wypłatę $V_4^B(b_2) = 4$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_4) = V_{\hat{1}}^A(a_4) = 6$.
- Jeśli gracz B dąży do stabilizacji wypłaty wokół wartości $\hat{V}_2^B = 4$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_1, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_4, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 4$ wypłatę $V_1^B(b_4) = 5$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_4^A(a_1) = V_{\hat{1}}^A(a_1) = 7$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 4$ wypłatę $V_2^B(b_2) = 4$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_2) = V_{\hat{1}}^A(a_2) = 4$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_3, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 4$ wypłatę $V_3^B(b_2) = 4$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_3) = V_{\hat{1}}^A(a_3) = 6$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_4, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 4$ wypłatę $V_4^B(b_2) = 4$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_4) = V_{\hat{1}}^A(a_4) = 6$.
- Itd.

W efekcie przeprowadzonych przekszatałceń otrzymuje się macierz wypłat dla gracza A w grze przeciwko naturze w postaci przedstawionej w tablicy 4.

Tabl. 4. Przekształcona macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze

Strategie	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	$\hat{b}_4$	$\hat{b}_5$	$\hat{b}_6$
a_1	7	7	7	6	4	5
a_2	4	4	3	5	8	8
a_3	3	6	7	6	6	6
a_4	6	6	5	6	7	7

Decyzję odnośnie do wyboru strategii gracz A może teraz oprzeć na jednym z kryteriów wyboru strategii w grach przeciwko naturze. Jeśli dla przykładu będzie się kierował kryterium Walda w postaci:

$$\max\{\min_{\hat{s}} V^A_{\hat{s}}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{5}$$

to powinien wybrać strategię a_4, dającą mu minimalną wartość wypłaty równą $V^A_{\hat{3}}(a_4) = 5$. Na identyczną strategię wskazuje kryterium Laplace'a w postaci:

$$\max\{\sum_{\hat{s}} V^A_{\hat{s}}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}. \tag{6}$$

Jeśli jednak będzie się kierował kryterium optymistycznym w postaci:

$$\max\{\max_{\hat{s}} V^A_{\hat{s}}(a_i) : i \in \mathcal{I}_A\}, \tag{7}$$

to powinien wybrać strategię a_2, dla której nawiększa wypłata wynosi $V^A_{\hat{5}}(a_2) = V^A_{\hat{6}}(a_2) = 8$.

Można również stosować kryteria operujące na macierzy strat typu: Savage'a, LNW itp. [2, 5].

□

Należy wyraźnie podkreślić, że macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze, reprezentującej prawdopodobne punkty stabilizacji, nie ma tych samych właściwości, co oryginalna macierz wypłat gracza A, tzn. oryginalna macierz wypłat gracza A (bez uwzględniania macierzy wypłat gracza B) definiuje inną grę przeciwko naturze niż macierz, w której natura reprezentuje możliwe punkty stabilizacji wartości wypłaty gracza B. Zilustrowano to na przykładzie.

Przykład 3

Macierz wypłat graczy A i B jest taka, jak w tablicy 5. Zakładając, że gracz A nie uwzględnia potencjalnych odpowiedzi gracza B, jego macierz wypłat (w tak powstałej grze przeciwko naturze) przedstawia się jak w tablicy 6. Widać, że strategia a_1 dominuje nad strategią a_2, a więc każde racjonalne kryterium wyboru strategii w grach przeciwko naturze wskaże właśnie na tę strategię.

Co się stanie, jeśli zostaną uwzględnione potencjalne odpowiedzi gracza B, przy założeniu nieznajomości charakteru kryterium definiującego jego funkcję wypłaty?

Tabl. 5. Macierz wypłat graczy A i B

Strategie	b_1	b_2	b_3
a_1	[2,1]	[1,3]	[2,1]
a_2	[1,1]	[1,1]	[2,4]

Tabl. 6. Oryginalna macierz wypłat gracza A, definiująca grę przeciwko naturze, jeśli gracz A nie uwzględnia potencjalnych odpowiedzi gracza B

Strategie	b_1	b_2	b_3
a_1	2	1	2
a_2	1	1	2

Zgodnie z założeniami zaprezentowanej metody, nieznajomość charakteru kryterium gracza B jest wyrażona za pomocą stabilizacji funkcji wypłaty wokół wszystkich wartości z jego macierzy wypłat. Stąd otrzymuje się trzy strategie:

$\hat{b}_1$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_1^B = 1$;
$\hat{b}_2$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_2^B = 3$;
$\hat{b}_3$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_3^B = 4$.

Poniżej opisano odpowiedzi gracza B na poszczególne strategie gracza A przy różnych wartościach punktu stabilizacji.

- Jeśli gracz B dąży do stabilizacji wypłaty wokół wartości $\hat{V}_1^B = 1$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_1, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1 albo b_3, dającą mu w obu przypadkach najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 1$ wypłatę $V_1^B(b_1) = V_1^B(b_3) = 1$, to w obu przypadkach gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_1^A(a_1) = V_3^A(a_1) = V_{\hat{1}}^A(a_1) = 2$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1 albo b_2, dającą mu w obu przypadkach najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 1$ wypłatę $V_2^B(b_1) = V_2^B(b_2) = 1$, to w obu przypadkach gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_1^A(a_2) = V_2^A(a_2) = V_{\hat{1}}^A(a_2) = 1$.
- Jeśli gracz B dąży do stabilizacji wypłaty wokół wartości $\hat{V}_2^B = 3$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_1, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_2^B = 3$ wypłatę $V_1^B(b_2) = 3$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_1) = V_{\hat{2}}^A(a_1) = 1$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_3, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_2^B = 3$ wypłatę $V_2^B(b_3) = 4$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_3^A(a_2) = V_{\hat{2}}^A(a_2) = 2$.

- Jeśli gracz B dąży do stabilizacji wypłaty wokół wartości $\hat{V}_3^B = 4$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_1, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_2^B = 4$ wypłatę $V_1^B(b_2) = 3$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_1) = V_3^A(a_1) = 1$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_3, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_2^B = 4$ wypłatę $V_2^B(b_3) = 4$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_3^A(a_2) = V_3^A(a_2) = 2$.

Macierz wypłat w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji, przedstawiono w tablicy 7. W tej macierzy tym razem strategia a_2 (z dokładnością do uporządkowania wartości) zdominuje strategię a_1, a więc ona będzie preferowana.

Tabl. 7. Macierz wypłat gracza A, definiująca grę przeciwko naturze, reprezentujacej możliwe wartości stabilizacji

Strategie	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$
a_1	2	1	1
a_2	1	2	2

□

W zaprezentowanej metodzie nie bez znaczenia jest dobór potencjalnych punktów, wokół których dokonuje się stabilizacja. Dla przykładu, powiększanie liczby punktów stabilizacji powyżej największej wartości w macierzy wypłat gracza B sztucznie zawyża wartość, w sensie kryterium Laplace'a, tych strategii gracza A, dla których w przekształconej macierzy wypłat znajduje się wartość największa. W analogiczny sposób zwiększanie liczby punktów stabilizacji poniżej najmniejszej zaniża wartość owych kryteriów w sensie kryterium Laplace'a. Ogólnie można powiedzieć, że zmiana liczby punktów stabilizacji modyfikuje wartość strategii w sensie kryteriów nie spełniających aksjomatu niewrażliwości na duplikację kolumny [8].

Rozsądne zatem wydaje się założenie, że gracz B dokonuje stabilizacji wyłącznie wokół wartości, które znajdują się w jego macierzy wypłat.

Niejednoznaczność odpowiedzi gracza B

W przykładzie 3 dwukrotnie wystąpiła sytuacja niejednoznacznej odpowiedzi gracza B. Gdy zakładano, że dąży on do stabilizacji wartości funkcji wypłaty wokół $\hat{V}_1^B = 1$, na strategię a_1 gracz B mógł wybrać strategię b_1 lub b_3, a w odpowiedzi na strategię a_2 – b_1 lub b_2. Każda z odpowiedzi dawała graczowi B taką samą wypłatę równą 1. Niejednoznaczność odpowiedzi gracza B nie miała jednak wpływu na wartość wypłaty gracza A. Gdy wybrał on strategię a_1 – niezależnie od tego, czy gracz B wybrał b_1, czy b_3 – gracz A otrzymywał wypłatę równą $V_1^A(a_1) = V_3^A(a_1) = 2$. W przypadku wyboru strategii a_2 – niezależnie od tego, czy gracz B wybrał b_1, czy b_2 – gracz A otrzymywał wypłatę równą $V_1^A(a_2) = V_2^A(a_2) = 1$. Jednak nie zawsze strategie $b_j(a_i)$, które graczowi B dają jednakowe wartości funkcji wypłaty, dla gracza A mają taką samą wartość. Zilustrowano to na przykładzie 4.

Przykład 4

Rozważana jest gra z macierzą wypłat jak w tablicy 8.

Tabl. 8. Macierz wypłat graczy A i B. Problem niejednoznaczności odpowiedzi gracza B

Strategie	b_1	b_2
a_1	[2,1]	[2,2]
a_2	[1,2]	[3,2]

Przyjęto, że gracz A zna charakter kryterium gracza B i jest to kryterium maksymalizowane. Gracz A rusza się jako pierwszy. Aby wskazać najlepszą własną strategię gry, gracz A określa dla każdej strategii a_i, najlepszą z punktu widzenia gracza B odpowiedź – $\hat{b}(a_i)$①. Na tej podstawie dla każdej strategii a_i gracz A określa wartość wypłaty, jaką otrzyma – $V_{\hat{j}}^A(a_i)$ i wybiera strategię, która tę wypłatę maksymalizuje.

W tablicy 9 dokonano zestawienia odpowiednich wartości dla poszczególnych strategii a_i. Którą strategię powinien wybrać gracz A? Zgodnie z zależnością (4) tę, która daje największą wartość wypłaty $V_{\hat{j}}^A(a_i)$. Niestety, na podstawie danych z tablicy 9 nie można jednoznacznie określić, która to będzie strategia.

Tabl. 9. Zestawienie najlepszej z punktu widzenia gracza B odpowiedzi oraz wartości wypłat obu graczy dla każdej strategii gracza A

a_i	$\hat{b}(a_i)$	$V_i^B(\hat{b}(a_i))$	$V_{\hat{j}}^A(a_i)$
a_1	b_2	2	2
a_2	b_1 lub b_2	2	1 lub 3

Wynika to z niejednoznaczności odpowiedzi gracza B na strategię a_2. Jeśli gracz A będzie miał pewność, że jeśli wybierze strategię a_2, to w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1, wówczas najkorzystniej dla gracza A jest wybrać strategię a_1, co da mu wypłatę równą $V_2^A(a_1) = 2$ (wybranie strategii a_2 dałoby mu wypłatę równą $V_1^A(a_2) = 1$). Jeśli zaś gracz B będzie miał pewność, że w odpowiedzi na strategię a_2 gracz B wybierze strategię b_2, wówczas najlepszą strategią gracza A jest strategia a_2, zapewniająca mu wypłatę równą $V_2^A(a_2) = 3$.

□

Niejednoznaczność odpowiedzi gracza B jest źródłem niepewności dla gracza A. W tym wąskim zakresie niejednoznaczności odpowiedzi gracza B, gracz A może (i powinien) traktować decyzje gracza B jako strategie natury, której ruchów nie jest w stanie przewidzieć. Wobec tego rozsądne jest,

① *Strategię b_j, dającą największą wartość wypłaty $V_i^B(b_j)$.*

aby gracz A przy wyborze odpowiedniej strategii a_i nie kierował się porównywaniem odpowiednich wypłat $V_j^A(a_i)$, związanych z potencjalnymi odpowiedziami gracza B – $b_j(a_i)$. Gracz A powinien porównywać odpowiednie agregaty z wszelkich możliwych wartości $V_j^A(a_i)$, jakie może otrzymać w wyniku wyboru strategii a_i. Dalej będą ponownie rozpatrzone przypadki znanego i nieznanego charakteru kryterium gracza B.

Znany charakter kryterium gracza B

W przypadku gdy jest znany charakter kryterium gracza B i może on odpowiedzieć w sposób niejednoznaczny na strategie gracza A, procedura wyboru strategii realizowana przez gracza A może przebiegać w następujący sposób.

1. **Ustalenie zbioru indeksów optymalnych strategii gracza *B*.** Dla każdej strategii a_i gracza A trzeba określić zbiór indeksów $\mathfrak{I}_{\hat{B}i}$ optymalnych – w sensie charakteru jego kryterium[1] – odpowiedzi gracza B – $\hat{b}_j(a_i)$.
2. **Agregacja wartości wypłat gracza *A*.** Dla każdej strategii a_i trzeba określić wartość funkcji agregującej wypłaty $V_{\hat{j}}^A(a_i)$ gracza A – $\Upsilon(V_{\hat{j}}^A(a_i))$ po zbiorze optymalnych odpowiedzi gracza B – $\mathfrak{I}_{\hat{B}i}$. Funkcja agregacji odzwierciedla subiektywny stosunek gracza A do związanej z niejednoznacznością odpowiedzi gracza B niepewnością. W szczególności funkcja agregująca może przybrać następującą postać.

   - Przy podejściu pesymistycznym odnośnie do odpowiedzi gracza B (kryterium Walda):

   $$\Upsilon(V_{\hat{j}}^A(a_i)) = \min_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V_{\hat{j}}^A(a_i)\,. \tag{8}$$

   - Przy podejściu optymistycznym odnośnie do odpowiedzi gracza B (kryterium optymistyczne):

   $$\Upsilon(V_{\hat{j}}^A(a_i)) = \max_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V_{\hat{j}}^A(a_i)\,. \tag{9}$$

   - Przy podejściu z ostrożnym optymizmem odnośnie do odpowiedzi gracza B (kryterium Hurwicza):

   $$\Upsilon(V_{\hat{j}}^A(a_i)) = \alpha \max_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V_{\hat{j}}^A(a_i) + (1-\alpha) \min_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V_{\hat{j}}^A(a_i)\,. \tag{10}$$

   - Przy ocenie wartości średniej (kryterium Laplace'a):

   $$\Upsilon(V_{\hat{j}}^A(a_i)) = \frac{1}{L_{\hat{B}i}} \sum_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V_{\hat{j}}^A(a_i)\,, \tag{11}$$

   gdzie $L_{\hat{B}i}$ oznacza liczność zbioru $\mathfrak{I}_{\hat{B}i}$.

[1] *Maksymalizujacych, minimalizujących lub stabilizujących względem określonej wartości.*

Wydaje się, że nie można się odwoływać do agregacji, opierających się na funkcji straty (np. kryterium Savage'a, LNW itp.) [2, 5, 7, 8]. Wynika to z faktu, że kryteria te zakładają porównania różnych strategii gracza A przy ustalonej odpowiedzi gracza B, podczas gdy na ogół dla różnych strategii gracza A odpowiedź gracza B może być różna.

3. **Wybór strategii, dla której wartość funkcji agregującej jest największa**. Z uwzględnieniem stosunku do niepewności przez zastosowanie odpowiedniej funkcji agregującej, gracz A wybiera strategię, która daje mu największą wartość funkcji agregującej:

$$\hat{a} = \arg\max_{i} \Upsilon(V^A_{\hat{j}}(a_i)). \tag{12}$$

Stosując powyższe podejście do przykładu 4, otrzymuje się następujące zbiory indeksów optymalnych strategii gracza B: $\mathfrak{I}_{\hat{B}1} = \{2\}$, $\mathfrak{I}_{\hat{B}2} = \{1,2\}$. Przy założeniu, że gracz A wykazuje pesymizm odnośnie do odpowiedzi gracza B, jego funkcja agregacji przyjmie postać (8). Stąd dla strategii a_1 funkcja agregacji przyjmuje wartość:

$$\Upsilon(V^A_{\hat{j}}(a_1)) = \min_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}1}} V^A_{\hat{j}}(a_1) = V^A_2(a_1) = 2,$$

a dla strategii a_2:

$$\Upsilon(V^A_{\hat{j}}(a_2)) = \min_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}2}} V^A_{\hat{j}}(a_2) = \min(V^A_1(a_2), V^A_2(a_2)) = V^A_1(a_2) = 1.$$

Wykazując pesymizm odnośnie do odpowiedzi gracza B, gracz A powinien wybrać strategię a_1, co zapewni mu wypłatę równą $V^A_2(a_1) = 2$.

Gdyby gracz A wykazywał, dla odmiany, optymizm odnośnie do odpowiedzi gracza B, to sytuacja się już radykalnie zmieni. Funkcja agregująca przyjmie postać (9). Stąd dla strategii a_1 funkcja agregacji przyjmuje wartość:

$$\Upsilon(V^A_{\hat{j}}(a_1)) = \max_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}1}} V^A_{\hat{j}}(a_1) = V^A_2(a_1) = 2,$$

a dla strategii a_2:

$$\Upsilon(V^A_{\hat{j}}(a_2)) = \max_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}2}} V^A_{\hat{j}}(a_2) = \max(V^A_1(a_2), V^A_2(a_2)) = V^A_2(a_2) = 3.$$

W tej sytuacji gracz A powinien wybrać strategię a_2, co – w przypadku potwierdzenia optymistycznych oczekiwań – da mu wypłatę równą $V^A_2(a_2) = 3$.

Nieznany charakter kryterium gracza B

Problem niejednoznaczności odpowiedzi gracza B w przypadku nieznajomości charakteru jego kryterium zilustrowano na przykładzie 5.

Przykład 5

Macierz wypłat graczy przedstawia się jak w tablicy 10. Gracz A nie zna charakteru kryterium gracza B.

Tabl. 10. Macierz wypłat graczy A i B. Ilustracja problemu niejednoznaczności odpowiedzi gracza B w sytuacji nieznajomości charakteru jego kryterium

Strategie	b_1	b_2
a_1	[2,1]	[1,2]
a_2	[1,1]	[3,1]

Zgodnie z założeniami zaprezentowanej uprzednio metody podejścia do gier z nieznajomością charakteru kryterium gracza B, przyjęto:

$\hat{b}_1$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_1^B = 1$;

$\hat{b}_2$ – strategia, odpowiadająca stabilizacji wokół wartości $\hat{V}_2^B = 2$.

Odpowiedzi gracza B na poszczególne strategie gracza A, przy różnych wartościach punktu stabilizacji, będą się kształtowały następująco.

- Jeśli gracz B dąży do stabilizacji wypłaty wokół wartości $\hat{V}_1^B = 1$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_1, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 1$ wypłatę $V_1^B(b_1) = 1$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_1^A(a_1) = V_{\hat{1}}^A(a_1) = 2$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1 albo b_2, dającą mu w obu przypadkach najbliższą wartości $\hat{V}_1^B = 1$ wypłatę $V_2^B(b_1) = V_2^B(b_2) = 1$, to w zależności od odpowiedzi gracza B, gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_1^A(a_2) = 1$ lub $V_2^A(a_2) = 3$.
- Jeśli gracz B dąży do stabilizacji wypłaty wokół wartości $\hat{V}_2^B = 2$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_1, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_2, dającą mu najbliższą wartości $\hat{V}_2^B = 2$ wypłatę $V_1^B(b_2) = 2$, to gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_2^A(a_1) = 1$.
  - Jeśli gracz A wybierze strategię a_2, a w odpowiedzi gracz B wybierze strategię b_1 albo b_2, dającą mu w obu przypadkach najbliższą wartości $\hat{V}_2^B = 2$ wypłatę $V_2^B(b_1) = V_2^B(b_2) = 1$, to w zależności od odpowiedzi gracza B, gracz A otrzyma wówczas wypłatę $V_1^A(a_2) = 1$ lub $V_2^A(a_2) = 3$.

Stąd macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze, reprezentujacej możliwe wartości stabilizacji, przedstawia się jak w tablicy 11.

Tabl. 11. Macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji

Strategie	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$
a_1	2	1
a_2	1 lub 3	1 lub 3

W przypadku strategii a_2 odpowiedź gracza B nie jest jednoznaczna. □

Problem niejednoznaczności odpowiedzi gracza B w przypadku nieznajomości charakteru jego kryterium można rozwiązać w sposób analogiczny, jak w przypadku znanego charakteru kryterium gracza B, dokonując odpowiedniej agregacji poszczególnych wartości funkcji wypłaty. Jeśli więc w grze z przykładu 5 gracz A przyjmie funkcję agregacji postaci:

$$\Upsilon(V^A_{\hat{j}}(a_i)) = \min_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V^A_{\hat{j}}(a_i), \tag{13}$$

to macierz wypłat w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji, przyjmie postać jak w tablicy 12.

Tabl. 12. Macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji, przy założeniu funkcji agregacji postaci (13)

Strategie	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$
a_1	2	1
a_2	1	1

Jeśli zaś przyjmie funkcję agregacji postaci:

$$\Upsilon(V^A_{\hat{j}}(a_i)) = \max_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V^A_{\hat{j}}(a_i), \tag{14}$$

to macierz wypłat w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji, przyjmie postać jak w tablicy 13.

Tabl. 13. Macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji, przy założeniu funkcji agregacji postaci (14)

Strategie	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$
a_1	2	1
a_2	3	3

Jeśli funkcja agregacji ma postać:

$$\Upsilon(V_{\hat{j}}^{A}(a_i)) = \frac{1}{L_{\hat{B}i}} \sum_{j \in \mathfrak{I}_{\hat{B}i}} V_{\hat{j}}^{A}(a_i)\,, \tag{15}$$

gdzie $L_{\hat{B}i}$ oznacza liczność zbioru $\mathfrak{I}_{\hat{B}i}$, macierz wypłat w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji, przyjmie postać jak w tablicy 14.

Tabl. 14. Macierz wypłat gracza A w grze przeciwko naturze, reprezentującej możliwe wartości stabilizacji, po założeniu funkcji agregacji postaci (15)

Strategie	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$
a_1	2	1
a_2	2	2

Uzyskuje się w ten sposób jednoznaczne macierze wypłat gracza A. Wybór odpowiedniej strategii gracz A opiera teraz już na jednym z racjonalnych kryteriów wyboru strategii w grach przeciwko naturze [2, 5, 7, 8].

Sytuacja gracza *A*, wykonującego ruch jako drugi

Gdy gracz A rusza się jako drugi, jego sytuacja decyzyjna jest prosta[1]. Przed podjęciem własnej decyzji zna już decyzję gracza B. Może więc traktować ją jako parametr w procesie optymalizacji własnej funkcji wypłaty. Jeśli gracz A dąży do maksymalizacji swojej funkcji wypłaty, jego problem wyboru optymalnej strategii sprowadza się do rozwiązania następującego zadania optymalizacji:

$$\hat{a} = \arg\max_{i} V_{j}^{A}(a_i), \tag{16}$$

jeśli gracz B wybrał strategię b_j.

Ruszanie się jako drugi umożliwia graczowi A kierowanie się nie tylko optymalizacją własnej funkcji wypłaty, ale także dążeniem do pogorszenia wartości wypłaty gracza B. Niezbędna jest tu jednak znajomość charakteru kryterium gracza B.

Gdy strategie gracza B reprezentują w rzeczywistości proces negocjacji cen na rynku hurtowym (ruchem hipotetycznego gracza H), gracz A może potraktować negocjacje jako przygotowanie odpowiedniej strategii h_l (strategii cen na rynku hurtowym), która w połączeniu z późniejszą strategią a_i (strategią cen na rynku detalicznym gracza A) zrealizuje jego cel w stopniu maksymalnym. Oczywiście wybór strategii h_l zależy tu również od decyzji gracza B. W szczególności więc gracz A zyskuje przewagę w negocjacjach, gdyż jego późniejsza odpowiedź na rynku detalicznym (strategia a_i) może też stanowić element przetargowy.

[1] *Prostota sytuacji decyzyjnej nie oznacza, że musi ona być dla gracza A korzystna. Są bowiem sytuacje, w których graczowi A bardziej opłacałoby się ruszyć jako pierwszy.*

W przypadku gdy strategie gracza A reprezentują proces negocjacji cen na rynku hurtowym, problem decyzyjny gracz A zamyka się w ramach sytuacji negocjacyjnej, której struktura (stosunek sił – BATNA[①] – graczy oraz wielkości dostępnych wypłat) są ukształtowane przez uprzednią decyzję b_j gracza B odnośnie do cen na jego rynku detalicznym. Wynik gry zostanie ostatecznie zdeterminowany przez wynik negocjacji (reprezentowanych tu przez ruch gracza A). Jeśli negocjacje zakończą się sukcesem, zostanie ustalona strategia h_l, odpowiadająca zaakceptowanym przez graczy wartościom stawek rozliczeniowych. Jeśli negocjacje zakończą się fiaskiem, zostanie ustalona strategia cen rekomendowanych h^*, jeśli któryś z graczy odwoła się do arbitrażu regulatora lub ustali się wynik, będący rezultatem konfiguracji sposobów (pozytywnego lub negatywnego) rozegrania gry przez graczy poza stołem negocjacyjnym, bez zawierania porozumienia, jeśli gracze do arbitrażu się nie odwołają.

Zakończenie

Problem nieznanego charakteru kryterium konkurenta i niejednoznaczności jego odpowiedzi stanowi zaledwie początek „kłopotów" w analizie gier o sumie niezerowej. Znajomość macierzy wypłat konkurenta pomaga graczom grać bardziej racjonalnie, jednak droga do racjonalizacji nie jest prosta. Wynika stąd najważniejszy wniosek dla rynku telekomunikacyjnego: operatorom nie wystarczy znajomość macierzy wypłat graczy konkurencyjnych (w szczególności modeli kosztów [4]), a nawet ich strategicznych celów. Podstawowym wyzwaniem jest, co z tą wiedzą zrobić?

Bibliografia

[1] *Decision theory and games*, www.actuarial.unsw.edu.au/courses/actl3003/documents/LectureNotes/lecturenote10.pdf

[2] Laskowski S.: *Criteria of choosing strategy in games against nature*. W: Materiały z konferencji *The Fifth International Conference on Decision Support for Telecommunications and Information Society*, Warszawa, 2005

[3] Laskowski S.: *Game against nature: playing on competitive telecommunications services market without knowledge of competitors' costs*. W: Materiały z konferencji *The Fourth International Conference on Decision Support for Telecommunications and Information Society*, Warszawa, 2004

[4] Laskowski S.: *Modelowanie gry rynkowej na konkurencyjnym rynku telekomunikacyjnym*. Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2004, nr 3-4, s. 47–60

[5] Laskowski S.: *Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych i negocjacji stawek rozliczeniowych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych*. Rozprawa doktorska. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2006

[6] Laskowski S.: *Wspomaganie procesu ustalania cen detalicznych na konkurencyjnym rynku usług telekomunikacyjnych z asymetrią informacyjną*. Telekomunikacja i Techniki Informacyjne, 2006, nr 1-2, s. 25–50

[①] *Best alternative to a negotiated agreement – najlepsza alternatywa negocjowanego porozumienia.*

[7] Ogryczak W.: *Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka*. Skrypt wykładu. Warszawa, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, 2002

[8] Straffin P. D.: *Teoria gier*. Warszawa, Wydawnictwo Naukowe Scholar, 2001

[9] Worobiew N. N., Kofler E., Greniewski H.: *Strategia gier*. Warszawa, Książka i Wiedza, 1969

Sylwester Laskowski

Dr inż. Sylwester Laskowski (1973) – absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej (1999); absolwent Wydziału Instrumentalnego Warszawskiej Akademii Muzycznej (2003); pracownik naukowy Instytutu Łączności w Warszawie (od 2004); zainteresowania naukowe: techniki informacyjne, wspomaganie decyzji, analiza wielokryterialna, sztuka i technika negocjacji, teoria gier, rynek telekomunikacyjny i współpraca międzyoperatorska.
e-mail: S.Laskowski@itl.waw.pl